พาราโบลาปลอดภัย (Parabola of Safety)

อิธิพัฒน์ ธนบดีกาญจน์

May 20, 2020

1 บทนำ

ในวิชาฟิสิกส์ พาราโบลาปลอดภัย คือ พาราโบลาที่บ่งบอกถึงขอบเขตของโพรเจกไทล์*ที่จะสามารถเคลื่อนที่ไปได้ ซึ่งจะมีประโยชน์มากต่อการคำนวณโจทย์โพรเจกไทล์ที่ซับซ้อนโดยจะนำไปใช้ใน ปริภูมิ 2 มิติ หรือ ปริภูมิ 3 มิติ และถ้าวาดกราฟในปริภูมิ 3 มิติ จะได้รูปดังนี้

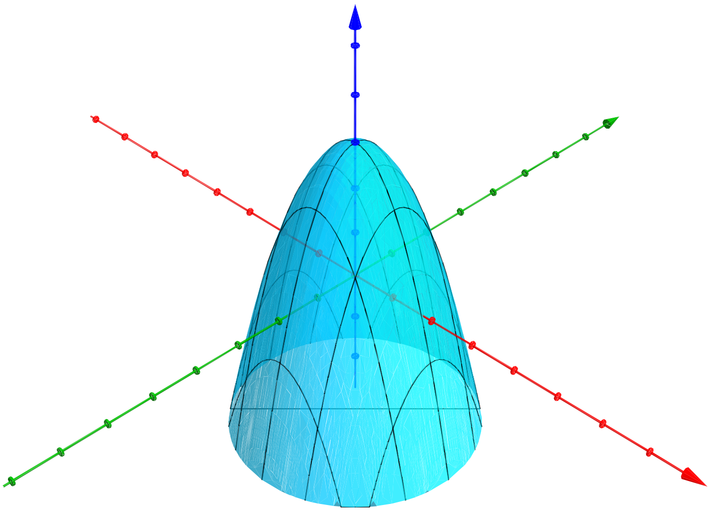


Figure 1: พาราโบลอยด์ (พาราโบลาในปริภูมิ 3 มิติ)

2 สมการพาราโบลาปลอดภัย

สมมติ เรายิงวัตถุจากจุดกำเนิดพิกัด (0,0) ด้วยอัตราเร็วต้น u ไปในทิศทางและมุมใด ๆ ในสนามโน้มถ่วงที่มีค่า g

*วัตถุใด ๆ ที่ถูกขว้างหรือถูกยิงออกไป

2.1 พิจารณาแกน x

เนื่องจากเป็นการเคลื่อนที่ ที่ไม่มีความเร่งจะได้

$$\Delta x = u_x t$$

สมมติยิงวัตถุทำมุม θ กับแนวระดับ

$$x = u\cos\theta t$$

$$t = \frac{x}{u\cos\theta} \tag{1}$$

2.2 พิจารณาแกน y

เนื่องจากเป็นการเคลื่อนที่ ที่มีความเร่งจะได้

$$\Delta y = u_y t + \frac{1}{2}a_y t^2$$

สมมติยิงวัตถุทำมุม θ กับแนวระดับ

$$y = u\sin\theta t - \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

2.3 พิจารณาแกน x และแกน y

นำ (1) แทนใน (2) จะได้สมการบรรยายการเคลื่อนที่ ที่ไม่ขึ้นกับเวลา

$$y = u\sin\theta(\frac{x}{u\cos\theta}) - \frac{1}{2}g(\frac{x}{u\cos\theta})^2$$

ทำการจัดรูป

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2}\sec^2\theta \tag{3}$$

จากเอกลักษณ์ตรีโกณมิติ

$$\sec^2\theta - \tan^2\theta = 1$$

$$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \tag{4}$$

นำ (4) ไปแทนใน (3)

$$y = x\tan\theta - \frac{1}{2}\frac{gx^2}{u^2}(1 + \tan^2\theta)$$

$$y = x\tan\theta - \frac{gx^2}{2u^2} - \frac{gx^2}{2u^2}\tan^2\theta$$

$$0 = \frac{gx^2}{2u^2}\tan^2\theta - x\tan\theta + (\frac{gx^2}{2u^2} + y)$$

เราจะสังเกตได้ว่าสมการนี้เป็น Quadratic Equation ดังนั้นสามารถาค่า $\tan\theta$ ได้โดยใช้ Quadratic Formula

$$\tan\theta = \frac{x \pm \sqrt{x^2 - 4\left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)\left(\frac{gx^2}{2u^2}+y\right)}}{2\left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)}$$

$\tan\theta$ มีค่าจริง (จุด (x,y) เป็นจุดที่สามารถยิงโพรเจกไทล์ไปได้) เมื่อภายในกรณฑ์ที่ 2 มีค่ามากกว่าเท่ากับ 0

$$\begin{aligned}
x^2 - 4\left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)\left(\frac{gx^2}{2u^2}+y\right) &\geqslant 0 \\
4\left(\frac{gx^2}{2u^2}\right)\left(\frac{gx^2}{2u^2}+y\right) &\leqslant x^2 \\
\frac{gx^2}{2u^2}+y &\leqslant \frac{u^2}{2g} \\
y &\leqslant \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2}
\end{aligned}$$

เนื่องจากเราต้องการสมการที่บอกขอบเขตของโพรเจกไทล์ที่สามารถเคลื่อนที่ไปได้ ดังนั้นสมการคือ

$$y = \frac{u^2}{2g} - \frac{gx^2}{2u^2} \quad \blacksquare \tag{5}$$

3 จุดที่น่าสนใจของพาราโบลาปลอดภัย

เนื่องจากสมการ (5) เป็นสามารพาราโบลา ดังนั้นสามารถจัดให้อยู่ในรูปมาตรฐานได้

$$\begin{aligned}
y - \frac{u^2}{2g} &= -\frac{gx^2}{2u^2} \\
-\frac{2u^2}{g}\left(y - \frac{u^2}{2g}\right) &= x^2
\end{aligned}$$

$$4\left(\frac{-u^2}{2g}\right)\left(y - \frac{u^2}{2g}\right) = x^2 \quad \blacksquare \tag{6}$$

เทียบได้กับสมการรูปมาตรฐานของพาราโบลา คือ

$$4c(y-k) = (x-h)^2$$

วาดกราฟ (เฉพาะเส้นสีแดง) จะได้

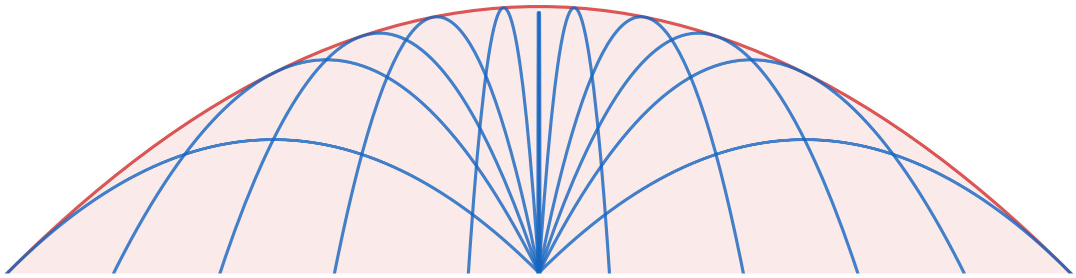


Figure 2: พาราโบลาปลอดภัย (พื้นที่สีแดงคือบริเวณที่ยิงได้และสีน้ำเงินคือแนววิถีของโพรเจกไทล์)

3.1 จุดยิง

เพราะพิจารณาการยิงวัตถุจากจุดกำเนิด (0,0) และพอคำนวณออกมาแล้วปรากฏว่าได้จุดโฟกัสของพาราโบลาปลอดภัยเป็นจุดกำเนิดเช่นกัน (พิจารณาจากสมการ (6)) ดังนั้นสรุปได้ว่า **จุดยิงเป็นจุดโฟกัส**

3.2 ระยะสูงสุดในแนวดิ่ง

เนื่องจากจุดยิงเป็นจุดโฟกัส จะได้ว่าระยะจากจุดโฟกัสถึงจุดยอดเท่ากับ $|c| = \dfrac{u^2}{2g}$ ก็คือการยิงวัตถุทำมุม $90°$ นั้นเอง

3.3 ระยะไกลสุดในแนวราบ

เนื่องจากจุดยิงเป็นจุดโฟกัส จะได้ Latus Rectum[†]$= |4c| = \dfrac{2u^2}{g}$ แต่เราต้องการแค่ครึ่งเดียวของ Latus Rectum (ระยะไกลสุดในแนวราบ) จะได้ $\dfrac{u^2}{g}$ ก็คือการยิงวัตถุทำมุม $45°$ นั้นเอง ซึ่งค่านี้เราก็สามารถหาได้จากจุดตัดแกน x ของกราฟพาราโบลาเช่นเดียวกัน

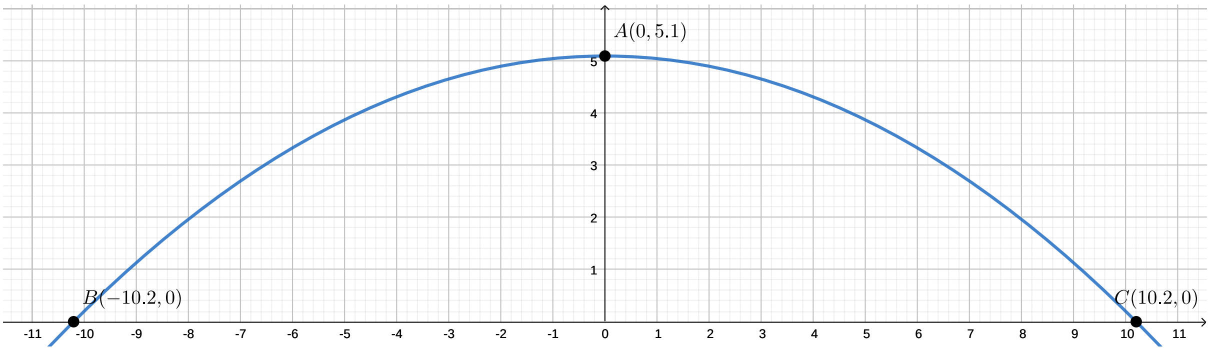
3.4 2 คำตอบ 2 มุม

เพราะว่าการแก้หา $\tan\theta$ เพื่อจะหาสมการพาราโบลาปลอดภัยเป็นการแก้ Quadratic Equation จะได้ 2 คำตอบเมื่อในค่าใต้กรณฑ์ที่ 2 มากกว่า 0 แสดงว่าจะมี 2 มุมที่สามารถยิงวัตถุไปที่จุด (x, y) นั้นได้แต่ถ้าเท่ากับ 0 แสดงว่าจะมีเพียงมุมเดียวที่สามารถยิงไปได้ก็คือ จุดที่อยู่บนพาราโบลาปลอดภัยนั้นเอง

[†]ความกว้างของพาราโบลา

4 ตัวอย่างการใช้งาน พาราโบลาปลอดภัย

สมมติ ยิงวัตถุด้วยอัตราเร็วต้น คือ 10 m/s และมีความเร่งเนื่องจากสนามโน้มถ่วง คือ 9.8 $\mathrm{m/s^2}$ จะวาดกราฟพาราโบลาปลอดภัยได้ดังนี้



ถ้าเราอยากรู้ว่า ถ้ายิงวัตถุจากจุด (0,0) โดยทำมุมกับแนวราบเท่าไรก็ได้แล้วจะได้ความสูงและระยะในแนวราบมากที่สุดเท่ากับเท่าไร
ดูจากกราฟพาราโบลาปลอดภัยก็ตอบได้ทันทีเลยว่า ความสูงที่มากที่สุด ≈ 5.1 m
และระยะในแนวราบที่มากที่สุด ≈ 10.2 m
ถ้าไม่เชื่อก็ลองเช็กดูด้วยสูตรการเคลื่อนที่แนวตรงโดยมีความเร่งคงที่!

5 เว็บไซต์สำหรับอ่านเพิ่มเติม

1. `https://bit.ly/3dlsqP9`
2. `https://bit.ly/2SDfoEL`
3. `http://mpec.sc.mahidol.ac.th/forums/index.php/topic,2343`
4. `http://mpec.sc.mahidol.ac.th/forums/index.php/topic,345`
5. `http://mpec.sc.mahidol.ac.th/forums/index.php/topic,2342`